

# C

## *Résolution analytique du modèle d'ingestion*

Dans cette annexe, nous présentons la résolution analytique du système d'équations différentielles présenté en annexe B, qui fournit également les valeurs des différents paramètres. Le but de cette résolution est d'éviter l'intégration numérique du système d'équations différentielles afin de conserver une approche entièrement évènementielle de notre modélisation du comportement alimentaire du copépode. En effet, la résolution analytique va nous permettre de calculer à l'aide d'une fonction les dates d'évènements de satiété et de mort du modèle à évènements discrets.

### **Entrée en état « satiété »**

À partir de la fonction de satiété définie par P. Caparroy, nous pouvons définir deux conditions qui activent ou désactivent l'état de satiété comme suit :

$$\begin{cases} s = 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ s = 1 & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 - \left( \frac{V_p \frac{X_1}{M_N}}{0,66V_i} \right) \quad (\text{C.1})$$

Cette équation modélise le fait que si le volume de proies dans l'estomac du copépode dépasse  $\frac{2}{3}$  du volume de l'estomac, alors le copépode n'a plus faim ( $s = 1$ ) et réciproquement ( $s = 0$ ). Dans notre modélisation évènementielle, l'ingestion correspond à un évènement de capture d'une cellule de phytoplancton. Ainsi, à chaque capture,  $X_1$  augmente d'une unité de masse en azote d'une cellule de phytoplancton. Cette nouvelle valeur de  $X_1$  nous permet de savoir si le copépode est en état de satiété en remplaçant  $X_1$  dans l'équation C.1.

### **Sortie de l'état « satiété »**

Entre deux évènements de capture, la variable  $X_1$  est dépendante des processus liés à l'ingestion et à la digestion. En observant le système d'équations différentielles (voir annexe B), nous nous apercevons que  $X_1$  ne dépend d'aucune autre équation. Ceci est

vrai si nous retirons le processus d'ingestion ( $I$ ) de son expression. L'équation B.1 de l'annexe B devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= -A - F \\ &= -(C_a Z_i + (1 - C_a) Z_i) \\ &= -Z_i \\ &= -\frac{X_1}{T_i}\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{X_1}{\frac{X_1 V_p}{V_i} (t_{max} - t_{min}) + t_{min}}$$

Nous désirons trouver une expression analytique pour  $X_1$ . Posons :

$$\begin{aligned}a &= t_{min} t_{max} \\ b &= \frac{V_p}{V_i} (t_{max} - t_{min}) \\ c &= t_{min}\end{aligned}$$

alors

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{X_1(X_1 b + c)}{a}$$

L'équation peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{b}{a} X_1^2(t) + \frac{c}{a} X_1(t) + \dot{X}_1(t) = 0 \quad (\text{C.2})$$

avec  $\dot{X}_1$  la dérivée de  $X_1$  par rapport au temps.

Le théorème de Ricatti nous dit que si une équation est de la forme  $\dot{y} = A(t)y^2 + B(t)y$  alors, en posant  $\omega = (y - y_1)^{-1}$  avec  $y_1$  une solution particulière, il suffit de trouver la solution de l'équation en  $y$  de la forme :

$$\dot{\omega} + (B(t) + 2y_1 A(t))\omega = -A(t)$$

Dans notre cas,  $y = X_1(t)$ , il nous faut donc trouver  $y_1$ . Nous pouvons déduire une solution évidente de l'équation C.2 tel que :

$$\dot{X}_1 = 0 \quad \text{si} \quad X_1 = -\frac{c}{b} = y_1$$

En identifiant  $A(t)$  et  $B(t)$ , nous obtenons :

$$\dot{\omega} + \left(\frac{c}{a} - 2\frac{c b}{b a}\right)\omega = \frac{b}{a} \quad \text{d'où} \quad \dot{\omega} - \frac{c}{a}\omega + \frac{b}{a} = 0$$

Il existe une solution évidente  $\omega(t) = K e^{-\frac{c}{a}t} + \tau$  où  $\tau$  est une solution particulière de l'équation en  $\omega$  tel que  $\tau = \frac{b}{c}$ . Nous pouvons maintenant écrire la solution analytique de  $\dot{X}_1$ . Nous savons que :

$$\omega(t) = X_1(t) + \frac{c}{b} \quad d'o\grave{u} \quad X_1(t) = -\frac{c}{b} + \frac{1}{\omega(t)}$$

ce qui nous amène à l'expression de  $X_1(t)$  suivante :

$$X_1(t) = -\frac{c}{b} + \frac{1}{\frac{b}{c} + Ke^{-\frac{c}{a}t}} \quad (C.3)$$

Nous avons maintenant une expression analytique de  $X_1(t)$ . Cette fonction ne dépend que du temps et d'une constante  $K$  qui correspond à la condition initiale. Pour calculer la valeur de  $K$ , nous considérons la valeur de  $X_1$  à  $t = 0$  correspondant à l'évènement de capture d'une proie. Ainsi, à chaque évènement de capture, une nouvelle valeur de  $K$  est déterminée. La forme de la fonction  $X_1(t)$  ne change pas. Nous pouvons donc connaître la valeur de  $X_1(t) \forall t$  entre deux évènements de capture. Ainsi, nous pouvons calculer la date à laquelle le copépoде cessera d'être en état de satiété si aucun évènement de capture ne survient à l'aide de l'équation suivante :

$$si \ s = 1 \quad alors \quad d = - \left[ \frac{a}{c} \left( \ln \left( \frac{1}{\frac{0.66V_i M_N}{V_p} + \frac{c}{b}} \right) - \ln(K) \right) \right] \quad (C.4)$$

où  $d$  est la date de sortie de l'état de satiété.

### Entrée en état « mort »

Pour calculer la date de mort du copépoде, nous devons être capables de connaître la durée nécessaire pour que le niveau d'énergie interne du copépoде devienne nul. L'équation B.2 de l'annexe B décrit l'évolution du niveau d'énergie mis à disposition des processus métaboliques du copépoде (variable  $X_2$ ). Connaissant la forme analytique de  $X_1$ , nous sommes capables de trouver la forme analytique de  $X_2$ . Pour cela, nous devons également être capables de donner la forme analytique de  $X_5$  (équation B.5). Les détails des calculs sont décrits dans un rapport interne du laboratoire [DRG02]. Nous donnons ici les résultats en commençant par l'énergie dépensée ( $X_5$ ) :

$$X_5(t) = -f_2 X_1(t) + C_{st}t - f_2 \frac{a^2}{b} \frac{1}{a \frac{ab+acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc}} e^{-a \frac{ab+acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc}} - f_2 E_i \left( -\frac{a^2b + acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc} \right) + cst \quad (C.5)$$

Connaissant  $X_5(t)$ , il nous a été possible de définir l'équation qui décrit la variation au cours du temps de l'énergie disponible ( $X_2$ ) comme suit :

$$X_2(t) = -(1 - f_2)X_1(t) + C_{st}t - (1 - f_2) \frac{a^2}{b} \frac{1}{a \frac{ab+acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc}} e^{-a \frac{ab+acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc}} - (1 - f_2) E_i \left( -\frac{a^2b+acKe^{-\frac{c}{a}t}}{bc} \right) + cst \quad (C.6)$$

Pour calculer la date de mort du copépoде, il est nécessaire de trouver  $t$  tel que  $X_2(t) = 0$ . Pour cela, nous avons implémenté un algorithme de recherche dichotomique.

L'équation qui décrit l'évolution de la concentration en pelotes fécales dans le tractus digestif ( $X_3$ ) et celle qui donne l'évolution de la concentration en pelotes fécales évacuées ( $X_4$ ) sont ignorées. En effet, elles n'interviennent pas dans le calcul de la date de passage en état de satiété ou en état de mort. Nous en avons déterminé les formes analytiques [DRG02]. Il est donc possible de calculer ces valeurs pour de futures expériences où elles seraient utiles (par exemple pour un couplage avec un modèle de croissance du phytoplancton ou l'excrétion participerait à l'enrichissement en azote du milieu).